Komunikaty Mazursko-Warmińskie
nr 4 (323) 2023, s. 633–664
ISSN 0023-3196, eISSN 2719-8979
DOI: https://doi.org/10.51974/kmw-184274

ARTYKUŁY I MATERIAŁY / ARTICLES AND PAPERS / ARTIKEL UND MATERIALIEN

Karolina Karpińska
Instytut Historii Nauki im. Ludwika i Aleksandra Birkenmajerów Polskiej Akademii Nauk
karolinakarpinska@ihnpan.pl • https://orcid.org/0000-0002-1477-6622

Aparat matematyczny *De revolutionibus orbium coelestium* Mikołaja Kopernika oraz jego recepcja w nauczaniu szkolnym realizowanym na ziemiach polskich od XVI do XXI wieku*

The mathematical apparatus of Nicolaus Copernicus's *De revolutionibus orbium coelestium* and its reception in secondary school education on the Polish territories from the 16th to the 21st century

Der mathematische Apparat *De revolutionibus orbium coelestium* von Nikolaus Kopernikus und seine Rezeption im Schulunterricht in Polen vom 16. bis zum 21. Jahrhundert

Słowa kluczowe: Mikołaj Kopernik, trygonometria, historia matematyki, historia nauczania matematyki, *De revolutionibus*

Keywords: Nicolaus Copernicus, trigonometry, history of mathematics, history of mathematics education, *De revolutionibus*

Schlüsselwörter: Nikolaus Kopernikus, Trigonometrie, Geschichte der Mathematik, Geschichte des Mathematikunterrichts, *De revolutionibus*

STRESZCZENIE

W artykule dokonano analizy treści zawartych w rozdziałach XII, XIII i XIV pierwszej księgi *De revolutionibus orbium coelestium* Mikołaja Kopernika. Rozdziały te zawierają materiał trygono-

* Artykuł jest rozszerzoną wersją referatu wygłoszonego 28 września 2023 r. w Muzeum Warmii i Mazur w Olsztynie podczas konferencji naukowej: „Urodziny a życie aktywne. Jak Olsztyn i Toruń o Kopernika się spierają…", zorganizowanej przez Muzeum Warmii i Mazur oraz Instytut Północny im. Wojciecha Kętrzyńskiego w Olsztynie.

Data wpłynięcia tekstu: 21.12.2023 • Data wpłynięcia tekstu po poprawkach: 19.02.2024 • Data publikacji: 15.03.2024

metryczny, na którym astronom oparł wszelkie rozważania dotyczące heliocentryzmu. W rozdziale XII zbudował tablice „cięciw w kole", które dzisiaj nazwalibyśmy tablicami sinusów. W rozdziałach XIII i XIV zajął się rozwiązywaniem trójkątów płaskich i sferycznych. W niniejszym artykule ten aparat matematyczny został przeanalizowany ze współczesnego punktu widzenia, przy użyciu współczesnych oznaczeń i terminologii. Analizie została poddana recepcja matematyki Kopernika w nauczaniu szkolnym realizowanym na ziemiach polskich od XVI do XXI wieku.

ABSTRACT

The article analyses the contents of chapters XII, XIII and XIV of Nicolaus Copernicus' first book *De revolutionibus orbium coelestium*. These chapters contain the trigonometric material on which the astronomer based all considerations about heliocentrism. In chapter XII, he built "chords of a circle" tables, which today we would call sinus tables. Chapters XIII and XIV dealt with the solution of flat and spherical triangles. In this paper, this mathematical apparatus has been analysed from a contemporary point of view, using modern symbols and terminology. The analysis was carried out on the reception of Copernicus mathematics in school teaching on the Polish territories from the 16th to the 21st century.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Artikel analysiert den Inhalt der Kapitel XII, XIII und XIV des ersten Buches *De revolutionibus orbium coelestium* von Nikolaus Kopernikus. Diese Kapitel enthalten das trigonometrische Material, auf das der Astronom seine Überlegungen zum Heliozentrismus stützt. In Kapitel XII baute er „Sehnen im Kreis", die wir heute Sinustafeln nennen würden. In den Kapiteln XIII und XIV beschäftigte er sich mit der Lösung von geradlinigen und sphärischen Dreiecken. In diesem Artikel wird dieser mathematische Apparat aus einer modernen Perspektive analysiert, wobei moderne Bezeichnungen und Terminologie verwendet werden. Die Rezeption der Kopernikus-Mathematik wurde im Schulunterricht in Polen vom 16. bis zum 21. Jahrhundert analysiert.

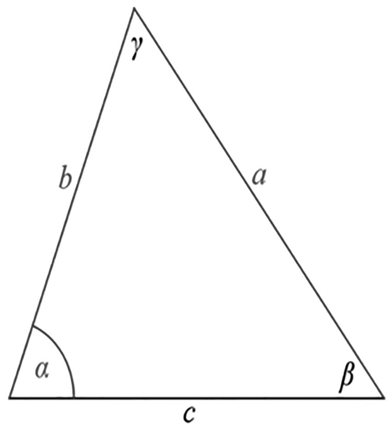
2023 rok ogłoszony został Rokiem Mikołaja Kopernika. Naukowcy przyglądają się postaci Kopernika przez pryzmat pamięci o nim i jego pracy, analizują różne formy jego obecności w nauce, literaturze i sztuce, w kulturze, pamiątkach itd. Jest to doskonała okazja, aby aparat matematyczny, na którym Kopernik oparł rozważania umieszczone w *De revolutionibus orbium coelestium, Libri VI* przeanalizować ze współczesnego punktu widzenia, w kontekście nauczania matematyki mającego miejsce w XXI wieku, ale również recepcji matematyki Kopernika w programach szkół średnich na ziemiach polskich od XVI do XX wieku.

Za podstawę matematyczną wszelkich rozważań dotyczących heliocentryzmu posłużyły Kopernikowi trygonometria płaska i trygonometria sferyczna. Tę bazę matematyczną umieścił w trzech rozdziałach pierwszej księgi *De revolutionibus*, tj. rozdziałach XII (*O cięciwach w kole*), XIII (*O bokach i kątach trójkątów płaskich prostolinijnych*) oraz XIV (*O trójkątach sferycznych*). W rozdziale XII zbadał zależności pomiędzy kątem środkowym, łukiem okręgu, na którym ten kąt jest oparty, oraz cięciwą stowarzyszoną z tym łukiem. Wszystko to wykorzystał do przygotowania tablic dzisiaj powiedzielibyśmy sinusów, choć sam Kopernik terminu „sinus" nie używał, a pisał długo: połowa cięciwy podwojonego łuku. Robił to śladem Gebera[1] – arabskiego uczonego żyjącego w XII wieku. Rozdział XIII poświęcił na omówienie sposobów rozwiązywania trójkątów płaskich, a rozdział XIV – rozwiązywaniu trójkątów sferycznych. Napisał: „Dowodzenia, którymi będę się posługiwać prawie w całym dziele, dotyczą linii prostych i łuków oraz trójkątów płaskich i sferycznych”[2].

TRYGONOMETRIA MIKOŁAJA KOPERNIKA W ŚWIETLE WSPÓŁCZESNEGO NAUCZANIA MATEMATYKI

„Rozwiązywanie trójkąta”, to wyznaczanie miar kątów i długości boków trójkąta w oparciu o pewne dane. Przykładowo, jeżeli znamy długości dwóch boków trójkąta oraz miarę kąta między nimi zawartego, to trójkąt ten rozwiążemy, gdy znajdziemy długość trzeciego boku i miary dwóch pozostałych kątów. Analogicznie, gdy znamy długości dwóch boków i miarę kąta leżącego naprzeciw dłuższego z nich, to trójkąt ten zostanie przez nas rozwiązany, gdy znajdziemy długość trzeciego boku i miary dwóch pozostałych kątów. Przy użyciu twierdzenia sinusów rozwiązania obu tych zadań stają się natychmiastowe.

Przyjrzyjmy się dokładniej drugiemu z tych zadań. Załóżmy, że a oraz b są długościami dwóch danych boków trójkąta oraz $a > b$, ponadto dana jest miara kąta leżącego naprzeciw dłuższego z tych boków i jest ona równa α.



Rys. 1.

[1] Dżabir Ibn Aflach, znany szerzej jako Geber, był matematykiem i astronomem działającym w XII w. w Sewilli. Zmarł ok. 1145 r. Uważany jest za wynalazcę przyrządu, który był prekursorem torquetum. Największym dziełem Gebera był dziewięciotomowy wykład astronomii, który w 1534 r. został przełożony na łacinę i wydany pt. *De astronomia libri IX* w Norymberdze.

[2] *Mikołaj Kopernik: O obrotach*, w: *Mikołaj Kopernik: Dzieła wszystkie II*, red. J. Dobrzycki, Warszawa–Kraków 1976, s. 26.

Przyjmując oznaczenia z powyższego rysunku, naszym zadaniem jest znalezienie wielkości β, γ oraz *c*.

Istotnie: z twierdzenia sinusów wiemy, że

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$$

stąd możemy wyznaczyć β, czyli miarę kąta leżącego naprzeciw krótszego z danych boków; teraz, znając α oraz β, natychmiast wyznaczamy również γ, mianowicie:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta;$$

następnie korzystając ponownie z twierdzenia sinusów otrzymujemy, że

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

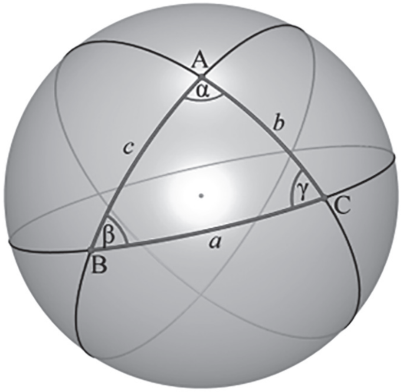
skąd możemy wyznaczyć ostatnią szukaną wielkość, czyli *c*. Tym samym trójkąt został przez nas rozwiązany.

Rozwiązywanie trójkątów płaskich znajduje się obecnie w programach szkół średnich. Zadania tego typu są w podstawie programowej współczesnych polskich liceów, techników oraz szkół branżowych[3]. Zgodnie z najnowszymi zarządzeniami ministerialnymi, ich znajomość jest również wymagana na egzaminach maturalnych z matematyki (na poziomie podstawowym).

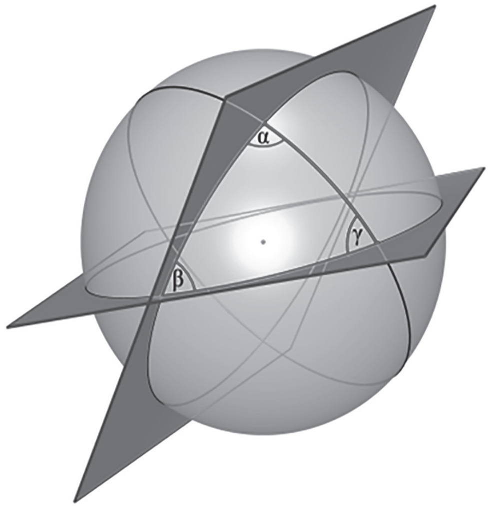
Właśnie temu zagadnieniu Mikołaj Kopernik poświęcił rozdział XIII księgi pierwszej *De revolutionibus.* W rozdziale XIV trójkąty z płaszczyzny przenosił na sferę. Tak jak na płaszczyźnie trzy punkty wyznaczają trójkąt (płaski), tak na sferze trzy punkty wyznaczają trójkąt sferyczny – jeżeli każde dwa z tych punktów (*A*, *B*, *C*) połączymy odpowiednim łukiem okręgu wielkiego, to otrzymamy trójkąt sferyczny *ABC*. Przyjmijmy oznaczenia z Rys. 2., wówczas bokami trójkąta sferycznego są te łuki okręgów wielkich przechodzących przez każde dwa z jego wierzchołków, które na rysunku oznaczone są one odpowiednio: *a*, *b* i *c*. Boki mierzymy w jednostkach miary kąta, czyli w stopniach albo radianach. Długość boku trójkąta sferycznego jest równa mierze kąta (płaskiego), który jest oparty na tym boku a jego wierzchołkiem jest środek sfery. Suma boków trójkąta sferycznego zawiera się w przedziale od 0° do 360° ($0° < a + b + c < 360°$). Kąty trójkąta sferycznego, ozn. α, β, γ (Rys. 3.), to kąty

[3] „Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła ponadpodstawowa: 4-letnie liceum, 5-letnie technikum" (Ministerstwo Edukacji Narodowej 2023), s. 19, „Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła ponadpodstawowa: branżowa szkoła I stopnia", s. 45, „Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła ponadpodstawowa: branżowa szkoła II stopnia", s. 60.

utworzone przez płaszczyzny przechodzące przez boki tego trójkąta i środek sfery: $180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$.



Rys. 2.



Rys. 3.

Kopernik rozwiązując trójkąty sferyczne sformułował sferyczny odpowiednik twierdzenia sinusów, czyli:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

a następnie go udowodnił. Samo twierdzenie sinusów dla trójkątów sferycznych było znane wcześniej. Zostało udowodnione przez Regiomontanusa[4], ale Kopernik tego nie wiedział. W *De revolutionibus* przeprowadził nowy, nieznany wcześniej dowód[5], oparty na materiale zawartym w *Almageście* Ptolemeusza[6]. Dowód tego twierdzenia należy do najważniejszych samodzielnych odkryć Kopernika.

Przykładowe zadanie: W trójkącie *ABC* mamy dane $|AC| = 3\sqrt{3}$, $|BC| = 3$ oraz $|\sphericalangle A| = 30°$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta. (Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda, *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa 2. Zakres podstawowy*, Warszawa 2020, s. 129)

Zadania związane z rozwiązywaniem trójkątów we współczesnej praktyce edukacyjnej na ziemiach polskich, obok zastosowania twierdzenia sinusów, często wymagają również zastosowania twierdzenia cosinusów. Kopernik w *De revolutionibus* ograniczył się do zadań, których rozwiązanie opierało się na wykorzystaniu jedynie twierdzenia sinusów.

[4] Regiomontanus (1436–1476) – niemiecki matematyk i astronom, jego dzieło *De triangulis omnimodis libri quinque* jest uważane za początek trygonometrii jako samodzielnej (niezależnej od astronomii) dziedziny matematyki.

[5] R. Duda, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Warszawa 2019, s. 51.

[6] C. Ptolemaeus, *Almagestu*[m] *Cl. Ptolemei Pheludiensis Alexandrini Astronomo*[rum] *Principis*, Venetiae 1515. Dzieło to powstało ok. 150 r. n. e.

Obecnie rozwiązywanie trójkątów płaskich nie wydaje się kwestią tak skomplikowaną, jak za czasów Mikołaja Kopernika. Jak zostało powiedziane, zadaniami tego typu zajmują się uczniowie współczesnych liceów czy techników. Rozwiązywania trójkątów sferycznych w programach nauczania obecnych szkół średnich nie ma, jednakże warto zaznaczyć, że całe zaplecze teoretyczne potrzebne do zrozumienia materiału z dzieła Kopernika znajduje się w obecnej podstawie programowej. Co więcej, matematyka Kopernika zawarta w rozdziałach XII, XIII i XIV pierwszej księgi *De revolutionibus* była wykładana w wybranych szkołach średnich na ziemiach polskich począwszy od XVI wieku, a w wieku XIX – w większości szkół przygotowujących do egzaminów maturalnych.

TRYGONOMETRIA KOPERNIKA W NAUCZANIU SZKOLNYM OD XVI DO XX WIEKU

Pierwsze informacje dotyczące wdrażania trygonometrii Kopernika do szkół średnich są związane ze Szkołą Nowodworską w Krakowie. Była to szkoła świecka założona przez Akademię Krakowską w 1588 roku, na wzór gimnazjum uniwersyteckiego w Heidelbergu. Nauczycielami w Szkole często byli wykładowcy Akademii Krakowskiej i aż do czasów Komisji Edukacji Narodowej (która ujednoliciła programy nauczania w szkołach, które jej podlegały) w dużej mierze to oni decydowali o realizowanych przez siebie programach nauczania, w konsekwencji, w obu placówkach, Akademii Krakowskiej i Szkole Nowodworskiej, często omawiali ten sam materiał. Pierwszą osobą, która zaznajamiała uczniów Szkoły Nowodworskiej z teorią Kopernika był Walenty Fontanus (zm. 1618)[7].

Trygonometria z *De revolutionibus* w wieku XVI była żywo dyskutowana w ówczesnym świecie naukowym. Gdy poznał ją Joachim Retyk (1514–1574), niezwłocznie wystosował list do Jerzego Hartmana z Norymbergi z prośbą o publikację części trygonometrycznej. Nastąpiło to w 1542 roku, czyli rok przed wydaniem całego dzieła Kopernika. Traktat nosił tytuł: *De lateribus et angulis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum, libellus eruditissimus et utilissimus cum ad plerasque Ptolomaei demonstrationes intelligendas, tum vero ad alia multa, scriptus a clarissimo et doctissimo viro D. Nicolao Copernico Toronensi*[8].

Fontanus w roku akademickim 1587/1588 wykładał trygonometrię na Akademii Krakowskiej właśnie w oparciu o *De lateribus et angulis triangulorum…*[9]. Ten

[7] G. Komarzyniec, *Nauczanie matematyki w krakowskiej Szkole Nowodworskiej w latach 1588–1914*, Kraków 2004, s. 31.

[8] M. Kopernik, *De lateribus et angulis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum, libellus eruditissimus et utilissimus cum ad plerasque Ptolomaei demonstrationes intelligendas, tum vero ad alia multa, scriptus a clarissimo et doctissimo viro D. Nicolao Copernico Toronensi*, Vittembergae 1542.

[9] S. Cynarski, *Znajomość nauki Kopernika w Polsce XVII i XVIII wieku*, Kraków 1973, s. 20.

sam materiał wdrażał do Szkoły Nowodworskiej. Pół wieku później, w 1640 roku, wydano jeden z najpopularniejszych podręczników dla szkół średnich nadzorowanych przez Akademię Krakowską (używany również w Szkole Nowodworskiej), zawierający omówienie trygonometrii płaskiej i sferycznej: *Arithmetica vulgaris et trigonometria rectilineorum pro ut universae geometria Practica, alijusqve Matheseos partibus, Geographia, Architectonica, Gnomonica etc.* Jana Tońskiego[10].

Od 1568 roku wykład matematyki i astronomii prowadzony był w protestanckim Gimnazjum Gdańskim. W 1572 roku wykładowcą tych przedmiotów został Maciej Menius (1544–1601), uczeń Filipa Melanchtona (który *notabene* potępiał heliocentryzm), później profesor na Uniwersytecie w Królewcu, następnie jego miejsce zajęli kolejno Jan Moller (zm. 1601) oraz Bartłomiej Keckermann (1572–1609). Wszyscy oni znali teorię Kopernika, ale wykładali najprawdopodobniej geocentryzm – na pewno robił tak Keckermann[11]. Nową jakość w kształceniu realizowanym w szkole gdańskiej przyniosło pojawienie się w niej Piotra Krügera (1580–1639), zwolennika teorii heliocentrycznej. Został on zatrudniony w 1607 roku i od tego czasu prowadził wykłady z arytmetyki, geometrii, trygonometrii, astronomii sferycznej, optyki, fizyki, geografii i logiki[12]. Równolegle publikował rozprawy dotyczące trygonometrii, arytmetyki, geografii, chronologii i kalendarografii, które później stawały się podręcznikami szkolnymi, na bazie których on i jego koledzy prowadzili wykłady w Gimnazjum. Jednym z tych podręczników był *Synopsis trigonometriae sive doctrinae triangulorum, cum canone trigonometrico*[13] wydany w Gdańsku w 1612 roku. Był to pierwszy na ziemiach polskich systematyczny wykład trygonometrii płaskiej i sferycznej, w którym autor opierał się na najnowszych odkryciach z tego zakresu. Trygonometria Kopernika została tutaj uzupełniona. Oprócz sinusów, Krüger wprowadził również: sinus rectus, tangens, secans, sinus versus. Obliczył tablice sinusów, tangensów i secansów dla koła o promieniu 10^5 i kątów od 0 do 90° w odstępach co 1'. Do rozwiązywania trójkątów płaskich, oprócz twierdzenia sinusów, wykorzystywał twierdzenia tangensów i cosinusów. Uzupełnieniom poddał również rozwiązywanie trójkątów sferycznych. Rozważania te wykorzystał później w wydanym w 1635 roku podręczniku astronomii sferycznej pt. *Doctrina astronomiae sphaerica*[14].

W oparciu o podręcznik trygonometrii przygotowany przez Krügera wykłady w Gimnazjum Gdańskim prowadził również Wawrzyniec Eichstadt (1596–1660).

[10] J. Toński, *Arithmetica vulgaris et trigonometria rectilineorum pro ut universae geometria Practica, alijusqve Matheseos partibus, Geographia, Architectonica, Gnomonica etc*, Ingolstadt 1640; K. Karpińska, *Gnomonics in Secondary School Education in the Territories of Poland in the 17th–20th Centuries*, w: *Advances In The History Of Mathematics Education*, red. Alexander Karp, Springer 2022, s. 154.

[11] S. Cynarski, op. cit., s. 25.

[12] M. Czerniakowska, *Matematyk i astronom Piotr Krüger 1580–1639*, Gdańsk 2015, s. 16.

[13] P. Crügero, *Synopsis trigonometriae sive doctrinae triangulorum, cum canone trigonometrico*, Dantisci 1612.

[14] P. Crügero, *Doctrina Astronomiae Sphaerica: Praeceptis methodicis & perspicuis, per Globum, Tabulas, Trigonometriam, tam Veterem quam Logarithmicam, explicata ac demonstrata, Cum Tabulis Ad Eam Pertinentibus*, Dantisci 1635.

W tekście zapowiadającym treść wykładów prowadzonych w 1648 roku napisał: „zamiast ruchu gwiazd ze wschodu na zachód z prędkością ogromną i co więcej szaloną, przedstawimy codzienne obroty Ziemi z zachodu na wschód […] w swoim miejscu również wyjaśni się w teorii planet, w jaki sposób posługiwać się subtelnymi hipotezami wielkiej chluby astronomii, Kopernika”[15]. Trygonometrię wykładali też kolejni XVII- i XVIII-wieczni nauczyciele gdańscy, m.in. Fryderyk Bühner (1622–1701), Paweł Pater (1656–1724) czy Henryk Kühn (1690–1769)[16].

Paweł Pater zanim trafił do Gimnazjum Gdańskiego był nauczycielem w Gimnazjum Toruńskim[17]. Rozpoczął tam pracę w 1688 roku i zwrócił szczególną uwagę na zastosowania matematyki m.in. w geografii, astronomii czy architekturze wojskowej, dlatego wysoko cenił trygonometrię. Tradycje związane z nauczaniem tego działu matematyki sięgają w Toruniu trzeciej dekady XVII wieku i czasów, gdy jednym z nauczycieli był tam doktor medycyny Adam Freytag (1608–1650), specjalista w zakresie fortyfikacji wojskowych. W 1631 roku opublikował on dzieło pt. *Architectura militaris*[18], opisujące budowę oraz metody zdobywania i obrony fortyfikacji bastionowych typu staroholenderskiego. Tadeusz Nowak w *Przeglądzie polskiego piśmiennictwa dziedziny fortyfikacji i inżynierii wojskowej w XVI–XVIII w*. napisał o tym dziele następująco: „było ono w chwili ukazania się i jest do dziś uważane za najlepszą na świecie pracę w tej dziedzinie”. Dzieło to przyniosło Freytagowi wielką sławę. Spowodowało też, że książę Janusz Radziwiłł uczynił go inżynierem wojskowym w wojnie z Rosją. W trakcie lekcji, które Freytag prowadził w Gimnazjum Toruńskim „Wiążąc naukę sferyczną z chronologią, uczniowie zapoznawali się z ruchami gwiazd oraz z obliczaniem czasu, na przykład zrównania dnia z nocą, letniego przesilenia dnia z nocą, krążenia Słońca, następstwa pór roku, wschodu i zachodu Słońca, długości poszczególnych dni i nocy itp.”[19] Podręcznikiem do trygonometrii był wówczas traktat trygonometryczny Krügera z 1612 roku.

Koniec XVII wieku, dzięki odkryciom Newtona umieszczonym w *Philosophiae naturalis principia matematica*, które potwierdziły teorię heliocentryczną, uznaje się za czas, od którego traktowanie koncepcji Kopernika jako hipotezy stało się poglądem przestarzałym, a przede wszystkim niezgodnym z najnowszą literaturą naukową. Nauczyciele w najlepszych szkołach nie mogli pozwolić sobie na odrzucanie teorii heliocentrycznej.

Nową jakość nauczania przyniosło wykorzystywanie w szkołach średnich podręczników Christiana Wolffa, w których autor objaśniał heliocentryzm jako rzecz

15 S. Cynarski, op. cit., Kraków 1973, s. 27.

16 K. Kubik, *Nauczanie matematyki w Toruńskim Gimnazjum Akademickim w XVI–XVIII w.*, w: *Księga Pamiątkowa 400-lecia Toruńskiego Gimnazjum Akademickiego*, red. Z. Zdrójkowski, t. 1, Toruń 1972, s. 114.

17 Gimnazjum Toruńskie zostało założone w 1568 r. (funkcjonowało do XX w.). Prowadzone było w duchu protestanckim, tym niemniej przyjmowano do niego również chłopców innych wyznań.

18 A. Freytag, *Architectura Militaris Nova Et Aucta, Oder Newe Vermehrte Fortification, Von Regular Vestungen, Von Irregular Vestungen und Aussen Wercken*, Leyden 1631.

19 K. Kubik, op. cit., s. 116.

nie budzącą zastrzeżeń. Podręczników tych używano w większości szkół protestanckich oraz w niektórych szkołach katolickich i szkołach innych wyznań. Do Gimnazjum Toruńskiego wprowadził je Reinhold Fryderyk Bornmann (ok. 1685–1747) w 1714 roku. Trygonometrii płaskiej i sferycznej nauczał wówczas w oparciu o *Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften* Christiana Wolffa[20].

Szkołą średnią, w której nauczyciele cenili odkrycie Kopernika była również funkcjonująca w latach 1602–1638 Szkoła Braci Polskich w Rakowie, prowadzona przez arian, choć uczęszczali do niej również katolicy i protestanci. Marcin Ruar (1589–1657), rektor tej szkoły w latach 1621–1622, po przestudiowaniu rozprawy Pierrea Gessendiego pt. *De apparente magnitudine Solis,* napisał do Marina Mersenne'a następująco: „że uznaję ruch dzienny Ziemi (albowiem co do rocznego to mam jeszcze pewne wątpliwości), przekonany tylko racjami, które i Kopernik, i Galileusz, i Kepler, i twój Gassendi, i inni wyłożyli, nie powinno Cię to wcale dziwić, skoro widzimy, że bardzo wielu współczesnych matematyków za tymi poglądami już idzie. A co się tyczy Twego zdania, iż należałoby najpierw zaczekać aż do wydania o tym decyzji rzymskiego Kościoła, to zdaje mi się ono dowodzić zbyt uległego i niewolniczego prawie umysłu. Bo dlaczegoż to w sporze matematycznym mamy słuchać raczej kierowników Kościoła, często nie rozumiejących się na tych rzeczach, aniżeli samych matematyków? Mnie się wydaje, że sam Gassendi, pozostawiając rozstrzygnięcie tej spornej kwestii wyrokowi Kościoła czyni to raczej, by mu się nie narazić, niż dlatego, że poważnie tak myśli"[21]. Na przełomie trzeciej i czwartej dekady XVII wieku w trakcie lekcji prowadzonych w Szkole Braci Polskich w Rakowie materiał zawarty w dziełach Kopernika, ale też Keplera i Galileusza, był omawiany przez nauczyciela matematyki Joachima Stegmanna (1595–1633)[22]. Odkrycia Kopernika cenili również Pijarzy.

Zupełnie inaczej do heliocentryzmu podchodzono w szkołach prowadzonych przez Jezuitów – przede wszystkim zwracano uwagę na sprzeczność teorii Kopernika z Biblią. Krzysztof Scheiner (zm. 1650), rektor Kolegium Jezuickiego w Nysie, ok. 1616 roku stwierdził, że „doktryna heliocentryzmu jest heretycka i chętnie aprobowana przez protestantów"[23]. W notatkach jednego z uczniów Kolegium Jezuickiego w Pułtusku, datowanych na 1632 rok, znajduje się stwierdzenie: „o żadnym ruchu ziemi nie można myśleć, gdyż jest to przeciwne Pismu św."[24]. Podobną tezę można

---

[20] C. Wolff, *Der Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften. Erster Theil, welche einen Unterricht von der Mathematischen Lehr-Art, die Rechen-Kunst, geometrie, Trigonometrie und Bau-Kunst in sich enthält, zu mehrerem Aufnehmen der Mathematik so wohl auf hohen als niedrigen Schulen*, wyd. nowe, ulepszone i rozszerzone, Frankfurt und Leipzig 1750; C. Wolff, *Der Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften. Dritter Theil welcher die Optik, Catoptrik und Dioptrik, die perspective, die Sphärische Trigonometrie, Astronomie, Chronologie, Geographie und Gnomonik in sich enthält*, wyd. 3, Halle 1725.

[21] S. Cynarski, op. cit., s. 30.

[22] Z. Ogonowski, *Arianie polscy*, Warszawa 1952, s. 102.

[23] S. Cynarski, op. cit., s. 19.

[24] Ibidem, s. 39.

znaleźć się w notatkach z wykładów astronomii prowadzonych w Kaliszu w 1636 roku przez jezuitę Tomasza Brodeskiego[25]. Jeszcze w połowie XVIII wieku wybrani jezuiccy profesorowie byli przeciwni teorii Kopernika, m.in. jezuita Mateusz Komonowicz krytycznie odnosił się do niej w wykładzie (pt. *Introductio in universam philosophiam*) wygłoszonym w Płocku w 1746 roku[26]. Zwrot w tej kwestii nastąpił dopiero w drugiej połowie XVIII wieku.

W większości szkół jezuickich nauczanie matematyki stało na niższym poziomie niż w szkołach protestanckich. W wydanym w 1711 roku zarządzeniu *Catalogus Praelectionum in Scholis Societatis Jesu Provinciae Polonae* zostało zaznaczone, że program nauczania matematyki w polskich kolegiach jezuickich miał być następujący: „In Mathematica: Elementa Euclidis, Arithmetica, Geometria, Geographia, Astronomia, Gnomonica, Calendarium etc. pro arbitrio"[27]. W programie znalazła się gnomonika. Najprawdopodobniej obejmowała ona konstrukcje płaskich zegarów słonecznych w sposób geometryczny[28]. Nie ma źródeł, które potwierdzałyby nauczanie gnomoniki w oparciu o trygonometrię (taki wykład był przeprowadzony we wspomnianym wcześniej podręczniku Tońskiego). Jednym z najpopularniejszych podręczników do matematyki w szkołach jezuickich był w tym czasie *Geometra Polski, tj. nauka rysowania, podziału i rozmierzania linii, angułów, figur i brył* Stanisława Solskiego[29], w którym została omówiona gnomonika, ale nie było rozważań dotyczących trygonometrii. Trygonometrii nie było również w ustawach wydanych w 1783 roku dla szkół podległych Komisji Edukacji Narodowej[30].

Ważny moment w historii nauczania matematyki stanowił rok 1788, w którym w Prusach zatwierdzono dekret wprowadzający egzaminy maturalne[31]. Z biegiem lat matury zaczęto wprowadzać również w innych krajach, a co za tym idzie czyniono kroki ku ujednoliceniu programów nauczania we wszystkich szkołach kończących się tymi egzaminami. Celem matur było wyrównanie poziomu wiedzy osób rozpoczynających studia uniwersyteckie.

Wyjątkowo szybko matury wprowadzono w szkołach polskich Księstwa Warszawskiego, bo już 17 lutego 1812 roku. Te zarządzenia były pierwszymi, które ustanawiały matematykę obowiązkowym przedmiotem maturalnym, do tego egzaminu musieli podejść wszyscy uczniowie planujący rozpocząć studia na kierunkach ścisłych i technicznych. W 1812 roku do programów szkół Księstwa Warszawskiego

[25] T. Przypkowski, *Astronomia w Kaliszu*, w: *Osiemnaście wieków Kalisza*, red. A. Gieysztor, t. 1, Poznań 1960, s. 190–192.

[26] S. Cynarski, op. cit., s. 45.

[27] K. Karpińska, op. cit., s. 150.

[28] Ibidem, s. 150.

[29] S. Solski, *Geometra Polski, tj. nauka rysowania, podziału i rozmierzania linii, angułów, figur i brył*, t. 1–3. Kraków 1683–1686.

[30] *Ustawy Komisyj Edukacyj Narodowej dla stanu akademickiego i na szkoły w krajach Rzeczypospolitej przepisane w Warszawie roku 1783.*

[31] Zob. – K. Karpińska, S. Domoradzki, *O egzaminie maturalnym z matematyki na obszarze zaboru pruskiego od XVIII do początku XX wieku*, „Antiquitates Mathematicae" 2017, 11, s. 157–201.

przygotowujących do matur, wprowadzono trygonometrię płaską i sferyczną[32]. Dla porównania podamy, że w Prusach matematyka stała się obowiązkowym przedmiotem maturalnym w czerwcu 1812 roku, w Austrii w 1849 roku, a we Francji w 1852[33].

Proces ujednolicania programów nauczania trwał do ok. połowy XIX wieku, a w jego konsekwencji trygonometria płaska i trygonometria sferyczna na stałe zagościły w szkołach przygotowujących do egzaminów maturalnych i o ile wykształcenie oraz przygotowanie nauczycieli przedmiotów ścisłych na to pozwalało, były wykładane do początku XX wieku.

Sposób nauczania trygonometrii od XVI do XX wieku uległ zmianom, tym niemniej świadectwem tego, że wciąż pamiętano o Koperniku był artykuł nauczyciela Gimnazjum Toruńskiego Edwarda Fassbendera (1816–1892), wykształconego na Uniwersytecie w Bonn, a później pracującego w szkołach średnich w Elberfeld, Iserlohn i Barmen, skąd trafił do Torunia. W sprawozdaniu Gimnazjum Toruńskiego z 1872 roku opublikował on artykuł pt. *Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreieckberechnungen*[34], który poświęcił rozwiązywaniu trójkątów płaskich i sferycznych – dokładnie omówił materiał zawarty w rozdziałach XII, XIII i XIV księgi pierwszej *De revolutionibus*. Dodatkowo poinformował, że uczniowie Gimnazjum Toruńskiego byli zaznajamiani z „systemem świata" Kopernika, a artykuł był dla nich jedynie formą usystematyzowania wiedzy zdobywanej na lekcjach. Po I wojnie światowej trygonometrię sferyczną usunięto z programów szkół średnich znajdujących się na terenie Polski. Trygonometria płaska w nich pozostała.

ROZDZIAŁ XII: *O CIĘCIWACH W KOLE*

W niniejszym artykule poddamy analizie treści zawarte w rozdziałach XII, XIII i XIV pierwszej księgi *De revolutionibus* Mikołaja Kopernika. Materiał z księgi XIII zostanie omówiony z zachowaniem struktury oryginału, zostaną przeanalizowane wszystkie treści w nim zawarte, jednakże będą one uzupełnione o dodatkowe wyjaśnienia oraz uogólnienia. W przeprowadzonych rozważaniach zostaną użyte współczesne oznaczenia i terminologia. Analizie zostaną też poddane wybrane zagadnienia z rozdziału XIV – pozwoli to poznać sposób rozwiązywania trójkątów sferycznych w *De revolutionibus*. Takie podejście do dzieła Kopernika, ma na celu uczynienie go bardziej przystępnym dla współczesnych odbiorców.

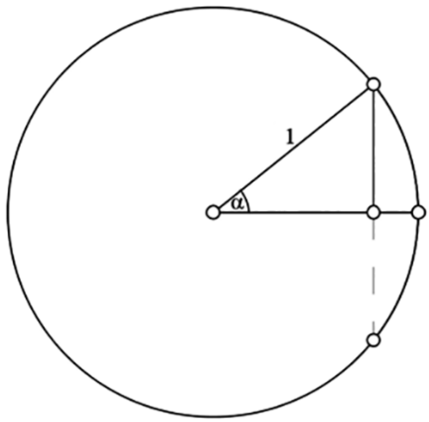
[32] J. Lipiński, *Plan nauk szkół departamentowych*, Warszawa 1812.

[33] K. Karpińska, *Mathematics teaching in gymnasia and real schools in Poland in the years 1795–1918: Schools with Polish and German as the language of instruction – comparison*, w: *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education (ESU-8)*, red. É. Barbin i in., Oslo 2019, s. 748.

[34] E. Fassbender, *Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreieckberechnungen*, Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn, Thorn 1872, s. 1–12. Artykuł ten miał stanowić formę uczczenia zbliżającej się 400. rocznicy urodzin Kopernika.

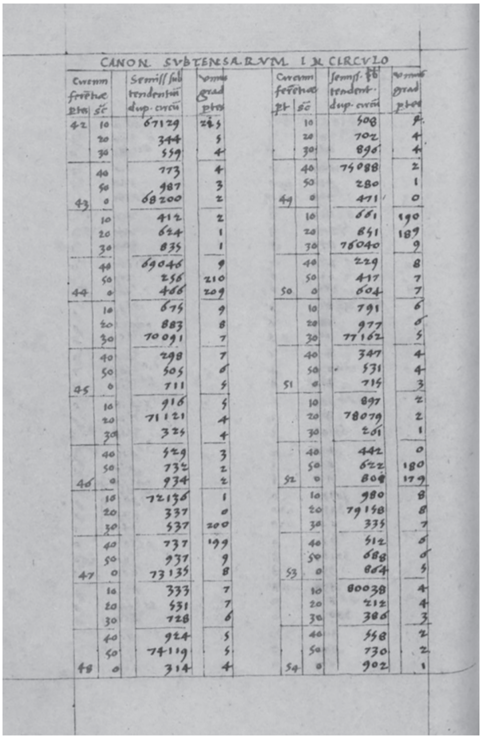
Rozdział XII był przedmiotem analogicznej analizy w artykule *Geometria Mikołaja Kopernika: o cięciwach w kole*, opublikowanym w numerze 6/2018 periodyku „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli”[35]. Wszelkie rozważania umieszczone w rozdziale XII były potrzebne Kopernikowi do utworzenia tablic. Tablice te zawierały trzy kolumny (spójrz na Rys. 5 i Rys. 6 – na Rys. 5. znajduje się jedna strona tych tablic zaczerpnięta z łacińskiego rękopisu *De revolutionibus*, a na Rys. 6. strona z polskojęzycznego wydania dzieła Kopernika). W pierwszej z nich umieścił długości łuków okręgu o promieniu 10^5 w odstępach co 10', w drugiej kolumnie w każdym wierszu podał połowę cięciwy podwojonego łuku z pierwszej kolumny, w trzeciej kolumnie zaś różnicę pomiędzy sąsiednimi wartościami trzeciej kolumny – różnica ta, przy użyciu interpolacji liniowej, pozwalała wyznaczyć „połowę cięciwy podwojonego łuku” dla łuku, którego miara nie została podana w tablicach.

Na przykład: dla łuku 90° długość połowy cięciwy stowarzyszonej z łukiem o mierze 180° (czyli 2 × 90°) wyniosła u Kopernika 100000, dla łuku 45° długość połowy cięciwy stowarzyszonej z łukiem o mierze 90° wyniosła 70711 (zaznaczmy tutaj, że dzisiaj wiemy, że jest to wartość przybliżona). Współcześnie powiedzielibyśmy, że były to tablice sinusów, choć sam Kopernik terminu „sinus” nie używał, lecz pisał długo: połowa cięciwy podwojonego łuku.



Rys. 4. „Połowa cięciwy podwojonego łuku” = sinus (kąta α)

[35] K. Karpińska, *Geometria Mikołaja Kopernika: o cięciwach w kole*, „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli” 2018, listopad/grudzień 6(27), s. 40–49.



CANON SVBTENSARVM IN CIRCVLO

Circumferentiae ptes	sc	Semiss. subtendentium dup. circu.	Vnius grad ptes	Circumferentiae pt	sc	Semiss. subtendent. dup. circu.	Vnius grad ptes
42	10	67129	215		10	508	4
	20	344	5		20	702	4
	30	559	4		30	896	4
	40	773	4		40	75088	2
	50	987	3		50	280	1
43	0	68200	2	49	0	471	0
	10	412	2		10	661	190
	20	624	1		20	851	189
	30	835	1		30	76040	9
	40	69046	9		40	229	8
	50	256	210		50	417	7
44	0	466	209	50	0	604	7
	10	675	9		10	791	6
	20	883	8		20	977	6
	30	70091	7		30	77162	5
	40	298	7		40	347	4
	50	505	6		50	531	4
45	0	711	5	51	0	715	3
	10	916	5		10	897	2
	20	71121	4		20	78079	2
	30	325	4		30	261	1
	40	529	3		40	442	0
	50	732	2		50	622	180
46	0	934	2	52	0	801	179
	10	72136	1		10	980	8
	20	337	0		20	79158	8
	30	537	200		30	335	7
	40	737	199		40	512	6
	50	937	9		50	688	6
47	0	73135	8	53	0	864	5
	10	333	7		10	80038	4
	20	531	7		20	212	4
	30	728	6		30	386	3
	40	924	5		40	558	2
	50	74119	5		50	730	2
48	0	314	4	54	0	902	1

Rys. 5. Rozdział XII księgi I, „tablica cięciw w kole" dla łuków od 42°10' do 54° – karta rękopisu[36]

TABLICA CIĘCIW W KOLE

Obwód		Połowa cięciwy podwójnego łuku	Różnica	Obwód		Połowa cięciwy podwójnego łuku	Różnica
Stopnie	Minuty			Stopnie	Minuty		
36	10	59014	235	42	10	67129	215
36	20	59248	234	42	20	67344	
36	30	59482		42	30	67559	214
36	40	59716	233	42	40	67773	
36	50	59949		42	50	67987	213
37	0	60181	232	43	0	68200	212
37	10	60413		43	10	68412	
37	20	60645	231	43	20	68624	211
37	30	60876		43	30	68835	
37	40	61107	230	43	40	69046	210
37	50	61337		43	50	69256	
38	0	61566	229	44	0	69466	209
38	10	61795		44	10	69675	
38	20	62024		44	20	69883	208
38	30	62251	228	44	30	70091	207
38	40	62479		44	40	70298	
38	50	62706	227	44	50	70505	206
39	0	62932		45	0	70711	205
39	10	63158	226	45	10	70916	
39	20	63383		45	20	71121	204
39	30	63608	225	45	30	71325	
39	40	63832		45	40	71529	203
39	50	64056	224	45	50	71732	202
40	0	64279	223	46	0	71934	
40	10	64501	222	46	10	72136	201
40	20	64723		46	20	72337	200
40	30	64945	221	46	30	72537	
40	40	65166	220	46	40	72737	199
40	50	65386		46	50	72936	
41	0	65606	219	47	0	73135	198
41	10	65825		47	10	73333	197
41	20	66044	218	47	20	73531	
41	30	66262		47	30	73728	196
41	40	66480	217	47	40	73924	195
41	50	66697		47	50	74119	
42	0	66913	216'	48	0	74314	194

Rys. 6. Rozdział XII księgi I, „tablica cięciw w kole" dla łuków od 36°10' do 48° – karta z polskojęzycznego wydania z 1976 roku[37]

Uwaga (*): Tablice długości cięciw dla okręgu o promieniu 10^5 ułożone przez Kopernika można uogólnić poprzez rozważenie okręgu o dowolnym promieniu[38] r. Miara łuku (miara kątowa) jest niezależna od długości promienia okręgu, ale długość cięciwy już tak. Gdy rozważany okrąg będzie miał promień r, to połowa długości cięciwy stowarzyszonej z podwojonym łukiem (miara łuku podana w lewej kolumnie tablic) będzie wynosiła w przybliżeniu

$$\frac{1}{10^5}\, r \times \begin{array}{l}\text{długość cięciwy podana w odpowiednim wierszu}\\ \text{środkowej kolumny tablic Kopernika}\end{array}$$

gdzie r jest promieniem rozważanego okręgu.

[36] M. Kopernik, *De revolutionibus libri sex*, 1520–1541, Źródło: Biblioteka Jagiellońska, sygn. BJ Rkp. 10000 III, k. 17.

[37] *Mikołaj Kopernik: O obrotach…*, s. 31.

[38] Przykładowo, Regiomontanus w 1467 r. stworzył tablice sinusów dla $r = 60 \times 10^5$.

Rozważania przeprowadzone w XII rozdziale pierwszej księgi *De revolutionibus*, a w szczególności tablice długości cięciw (tablice sinusów), stanowiły bazę do rozwiązywania trójkątów płaskich. Temu zagadnieniu astronom poświęcił rozdział XIII swojego dzieła. Kopernik zakładał w nim, że wszystkie rozwiązywane przez niego trójkąty były wpisane w okrąg o promieniu 10^5. W niniejszej pracy, w oparciu o powyższą Uwagę (*), rozważania te zostaną uogólnione na okręgi o dowolnym promieniu r.

Podstawową trudność, na którą współczesny odbiorca natrafia zgłębiając matematykę Kopernika, to nieco archaiczny język, brak symboli matematycznych i czasem również nieścisłość rachunkowa:

– Kopernik nie używał sformułowania „równe w przybliżeniu"; do końca XIX wieku między wielkościami, które różniły się od siebie nieznacznie, pisano znak równości (np. znak równości pisano między liczbami, które były jednakowe do pięciu miejsc po przecinku),
– Kopernik pisał: „kąt *ABC* jest równy…"; w XXI wieku używamy pojęcia miary kąta: „miara kąta *ABC* wynosi…" (symbolicznie: $|\sphericalangle ABC| = \ldots$),
– u Kopernika pod pojęciem „linii" kryły się zarówno dzisiejsze proste, jak i odcinki; w przeprowadzonej poniżej analizie, będziemy używali pojęć: prosta oraz odcinek (długość odcinka *AB* będziemy zapisywali symbolicznie: $|AB|$, tego symbolu nie używał Kopernik),
– w niektórych dowodach, które będą tutaj przeprowadzone i jednocześnie będą uzupełnieniami dzieła Kopernika, zostanie użyte pojęcie równoważności zdań (fakt, że zdania p oraz q są równoważne zapisuje się symbolicznie: $p \Leftrightarrow q$); tym pojęciem Kopernik się nie posługiwał.

ROZDZIAŁ XIII: *O BOKACH I KĄTACH TRÓJKĄTÓW PŁASKICH PROSTOLINIJNYCH*

Rozwiązywanie trójkąta, gdy dane są miary wszystkich jego kątów

Rozdział XII księgi pierwszej *De revolutionibus* miał wyraźny charakter rachunkowy, natomiast rozdziały XIII i XIV były czysto teoretyczne – zawierały omówienie schematów pozwalających rozwiązywać trójkąty.

Rozważania umieszczone w rozdziale XIII Kopernik rozpoczął od omówienia ogólnej metody rozwiązywania trójkąta *ABC*, gdy dane są miary wszystkich jego kątów. Gdybyśmy założyli, że trójkąt *ABC* jest wpisany w okrąg o promieniu 10^5, to rozwiązanie wymagałoby jedynie umiejętnego wykorzystania tablic Kopernika. W niniejszej pracy założymy jednak, że trójkąt *ABC* jest wpisany w okrąg o promieniu r, dlatego schemat rozwiązania będzie obejmował dwa główne kroki: 1) wykorzystanie tablic Kopernika, 2) zastosowanie powyższej Uwagi (*).

Niech dane będą miary kątów trójkąta ABC, czyli $|\sphericalangle ACB|$, $|\sphericalangle ABC|$, $|\sphericalangle CAB|$. Wyznaczmy długości jego boków. Istotnie:

1. Załóżmy, że trójkąt $A'B'C'$ jest trójkątem podobnym do trójkąta ABC wpisanym w okrąg o promieniu 10^5. Wówczas

$$|\sphericalangle A'C'B'| = |\sphericalangle ACB|, |\sphericalangle A'B'C'| = |\sphericalangle ABC|, |\sphericalangle C'A'B'| = |\sphericalangle CAB|.$$

Znamy $|\sphericalangle A'C'B'|$. W pierwszym kroku rozwiązania w lewej kolumnie tablic Kopernika odszukujemy łuk o mierze równej $\frac{1}{2}|\sphericalangle A'C'B'|$, wówczas w tym samym wierszu w środkowej kolumnie znajduje się długość połowy cięciwy stowarzyszonej z łukiem, na którym oparty jest $\sphericalangle A'C'B'$, czyli $\frac{1}{2}|A'B'|$. Po pomnożeniu otrzymanej wielkości przez 2 otrzymujemy $|A'B'|$ (bok $A'B'$ znajduje się naprzeciw $\sphericalangle A'C'B'$).

W analogiczny sposób można znaleźć długości pozostałych boków $\triangle A'B'C'$.

Zauważmy, że rozwiązanie to opiera się na zasadzie:

$$\frac{a}{2} = \sin \alpha, \ \frac{b}{2} = \sin \beta, \ \frac{c}{2} = \sin \gamma,$$

gdzie a, b oraz c są długościami boków znajdujących się naprzeciwko kątów odpowiednio α, β oraz γ.

2. Aby wyznaczyć długości boków trójkąta ABC wpisanego w okrąg o dowolnym promieniu r, wystarczy na ostatnim etapie rozwiązania dokonać operacji opisanej w Uwadze (*), czyli:

$$|AB| = \frac{1}{10^5} r \times |A'B'|,$$

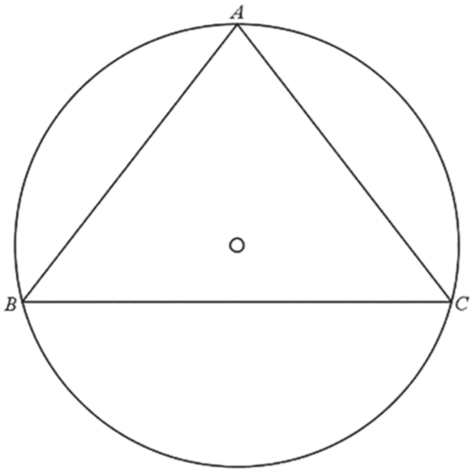
$$|BC| = \frac{1}{10^5} r \times |B'C'|,$$

$$|AC| = \frac{1}{10^5} r \times |A'C'|,$$

Rozwiązywanie trójkąta, gdy dane są długości dwóch jego boków i miara jednego z kątów

Znając długości dwóch boków trójkąta ABC i miarę jednego z kątów możemy obliczyć długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów. Istotnie:

1. Rozwiązanie rozpoczniemy od analizy przypadku, w którym dane są długości boków AB i AC oraz $|AB| = |AC|$.



Rys. 7.

Wówczas $\triangle ABC$ jest trójkątem równoramiennym. W trójkącie równoramiennym znając miarę jednego kąta (dowolnego) natychmiastowo możemy obliczyć miary pozostałych kątów, czyli $|\sphericalangle ABC|$, $|\sphericalangle ACB|$ oraz $|\sphericalangle BAC|$. Zatem jedyną trudność stanowi wyznaczenie długości boku BC.

Zanim jednak to zrobimy należy podkreślić, że mając długości dwóch boków i miary wszystkich kątów trójkąta ABC, trójkąt ten wyznaczymy w sposób jednoznaczny – jest tylko jedna możliwa długość boku BC. Dlatego w tym przypadku ważne jest, aby wyznaczyć promień okręgu r, w który wpisany jest rozważany przez nas trójkąt ABC.

W tym celu, rozważmy trójkąt $A'B'C'$ podobny do trójkąta ABC i wpisany w okrąg o promieniu 10^5 ($|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle A'C'B'|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C'|$). Znając $|\sphericalangle A'C'B'|$, z tablic Kopernika bezpośrednio odczytujemy (analogicznie jak robiliśmy to wcześniej, rozwiązując trójkąt znając miary wszystkich jego kątów) wartość $\frac{1}{2}|A'B'|$. Stąd znamy również $|A'B'|$. Teraz korzystając z zależności wynikającej z Uwagi (*):

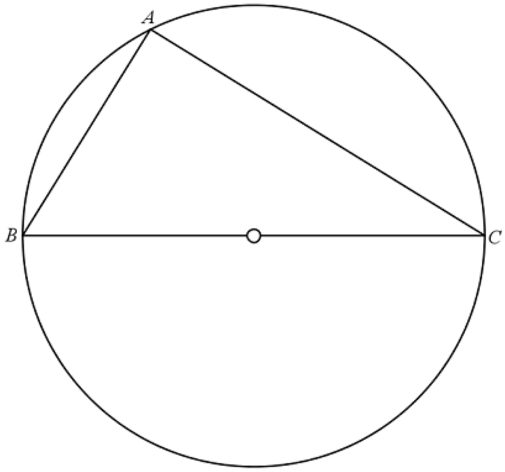
$$|AB| = \frac{1}{10^5} r \times |A'B'|,$$

bez trudu wyznaczymy promień okręgu (r), w który jest wpisany trójkąt ABC.

Aby wyznaczyć długość boku BC należy: w tablicach Kopernika odszukać łuk o mierze równej $\frac{1}{2}|\sphericalangle B'A'C'|$, wówczas w tym samym wierszu w środkowej kolumnie znajduje się długość połowy cięciwy stowarzyszonej z łukiem, na którym oparty jest

$\sphericalangle B'A'C'$, czyli $\frac{1}{2}|B'C'|$; znając $|B'C'|$ oraz korzystając z Uwagi (*) dla wyznaczonego wcześniej r wyznaczamy długość boku BC.

2. Niech teraz w trójkącie dane będą długości boków AB i AC, takie, że $|AB| \neq |AC|$, oraz dana będzie miara kąta zawartego między danymi bokami, czyli $|\sphericalangle BAC|$.
   a) Załóżmy najpierw, że $|\sphericalangle BAC| = 90°$.



Rys. 8.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa natychmiastowo wyznaczymy $|BC|$.

$|BC|$ jest jednocześnie długością średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie. Tym samym, znamy promień okręgu r, w który wpisany jest trójkąt ABC.

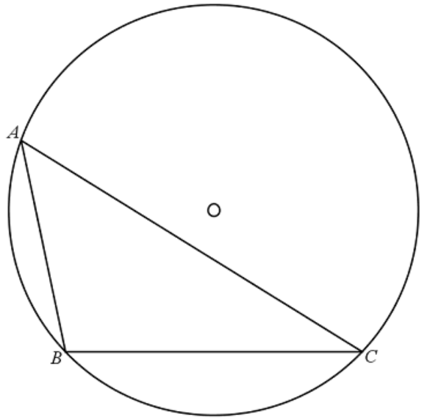
Wprowadźmy teraz pomocniczą wielkość a. Oznaczmy w ten sposób liczbę otrzymaną w następujący sposób:

$$a := \frac{\frac{1}{2}|AB| \times 10^5}{r}.$$

Jeżeli wartość a znajdziemy w środkowej kolumnie tablic Kopernika, to wartość występująca w tym samym wierszu w lewej kolumnie będzie równa $\frac{1}{2}|\sphericalangle ACB|$. Czyli będziemy znali również $|\sphericalangle ACB|$. Wówczas miara ostatniego kąta trójkąta ABC wynosi:

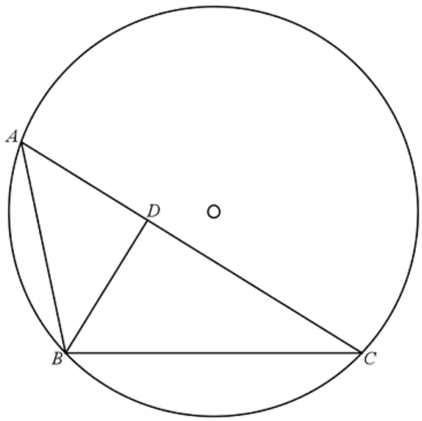
$$|\sphericalangle ABC| = 90° - |\sphericalangle ACB|.$$

b) Niech teraz ∢ *BAC* będzie kątem ostrym.



Rys. 9.

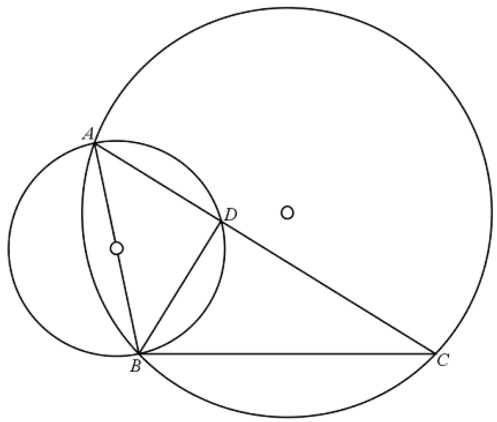
Poprowadźmy wysokość *BD* trójkąta *ABC*.



Rys. 10.

Wówczas w trójkącie *ABD* (dzięki temu, że znamy |∢ *BAD*|) znamy też miary pozostałych kątów: |∢ *ADB*| = 90°, |∢ *ABD*| = 90° – |∢ *BAD*|. Czyli, korzystając z tablic Kopernika, możemy obliczyć długość boku *A′D′* trójkąta *A′B′D′*, który będzie podobny do trójkąta ABD i wpisany w okrąg o promieniu 10^5.

Jednocześnie, jeżeli na △*ABD* opiszemy okrąg, to bok *AB* będzie jego średnicą:



Rys. 11.

dzięki temu, możemy obliczyć promień tego okręgu, czyli r. Zatem przy użyciu Uwagi (*) jesteśmy w stanie wyznaczyć $|AD|$. W analogiczny sposób wyznaczymy również $|BD|$.

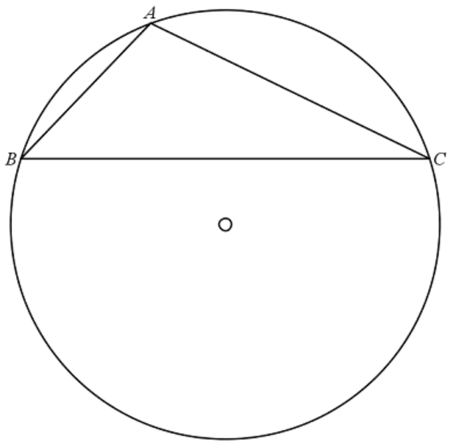
Skoro znamy $|AD|$ oraz $|AC|$, zatem możemy wyznaczyć też $|DC|$, ponieważ $|DC| = |AC| - |AD|$. W trójkącie BCD znamy teraz $|BD|$ oraz $|DC|$, więc, z twierdzenia Pitagorasa, możemy wyliczyć również $|BC|$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie BCD jest równy $\frac{1}{2}|BC|$, zatem jeżeli b będzie liczbą powstałą w następujący sposób:

$$b := \frac{\frac{1}{2}|BD| \times 10^5}{\frac{1}{2}|BC|},$$

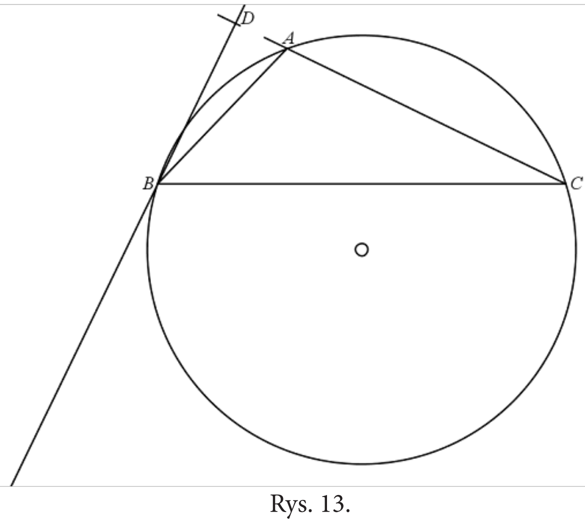
i znajdziemy ją w środkowej kolumnie tablic Kopernika, to wartość znajdująca się po lewej stronie w tym samym wierszu jest równa $\frac{1}{2}|\sphericalangle\, BCD|$. Tym samym, znana też jest również miara kąta $\sphericalangle\, BCD$. Wówczas $|\sphericalangle\, DBC| = 90° - |\sphericalangle\, BCD|$.

c) Niech teraz ∢ *BAC* będzie kątem rozwartym.



Rys. 12.

Poprowadźmy wysokość *BD* trójkąta *ABC*:



Rys. 13.

Wówczas, dokonując dla trójkątów *ABD* oraz *BCD* analogicznego rozumowania do tego, które zostało przeprowadzone w poprzednim podpunkcie, możemy znaleźć |*BD*|, |*AD*| oraz |*CD*|. Dzięki temu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, można znaleźć |*BC*|, a następnie korzystając z tablic Kopernika: |∢ *BCD*|. Wówczas |∢ *ABC*| = 180° – |∢ *BAC*| – |∢ *BCD*|.

3. Do przedyskutowania pozostała jeszcze sytuacja, gdy dane są $|AB|$, $|AC|$ oraz $|\sphericalangle ABC|$ (miara kąta, który nie jest zawarty między dwoma danymi bokami). Jeżeli rozważymy $\triangle A'B'C'$ podobny do $\triangle ABC$ i wpisany w okrąg o promieniu 10^5. Wówczas związku z tym, że $|\sphericalangle A'B'C'| = |\sphericalangle ABC|$, przy użyciu tablic Kopernika, możemy wyznaczyć $\frac{1}{2}|A'C'|$. Wykorzystując $|A'C'|$, długość boku AC daną w założeniach oraz stosując Uwagę (*), jesteśmy w stanie wyznaczyć promień okręgu (r), w który wpisany jest $\triangle ABC$.

Teraz, znając $\frac{1}{2}|AB|$ oraz r, korzystając z tablic Kopernika możemy wyznaczyć również $|\sphericalangle ACB|$. Wówczas: $|\sphericalangle BAC| = 180° - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB|$. Znamy $|\sphericalangle BAC|$, zatem wykorzystując tablice Kopernika, możemy wyliczyć $\frac{1}{2}|BC|$ (pamiętając oczywiście o Uwadze (*)). Tym samym, możemy też wyznaczyć $|BC|$.

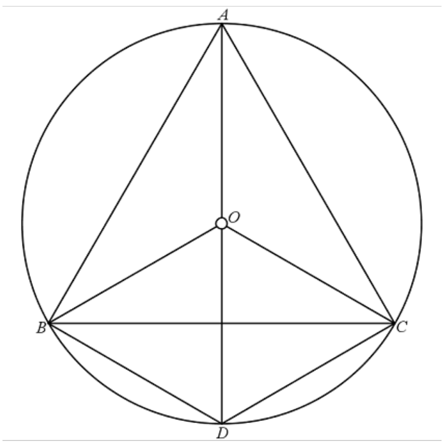
Rozwiązywanie trójkąta, gdy dane są wszystkie jego boki (**)

Ostatnim zagadnieniem przeanalizowanym w tej części dzieła jest znajdowanie miar kątów trójkąta, gdy znane są długości wszystkich jego boków. Kopernik przedstawił dwa rozwiązania tego problemu.

Pierwszy sposób (***)

Pierwsze rozwiązanie opiera się na odrębnym przeanalizowaniu trzech przypadków: gdy rozważany trójkąt jest równoboczny, następnie równoramienny, aż w końcu różnoboczny. Mianowicie:

– Jeżeli rozważany trójkąt jest równoboczny, to wszystkie jego kąty mają miarę 60°.
– Jeżeli trójkąt ABC jest równoramienny oraz $|AB| = |AC|$, to ze środka okręgu opisanego na tym trójkącie prowadzimy promień prostopadły do boku BC i oznaczamy go OD:



Rys. 14.

Zauważmy, że $\sphericalangle DAC$ oraz $\sphericalangle DOC$ są odpowiednio kątem wpisanym i kątem środkowym opartym na tym samym łuku, czyli $|\sphericalangle DOC| = 2 \times |\sphericalangle DAC|$, stąd $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DOC|$. Ponadto $\triangle DOC$ jest trójkątem równoramiennym, zatem

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ODC| \text{ oraz } |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle OCD|.$$

Oznacza to, że $\triangle ABC$ oraz $\triangle DOC$ są podobne, czyli

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|OD|}{|DC|}.$$

Oznaczmy promień okręgu opisanego przez r oraz zauważmy, że $\triangle ADC$ jest trójkątem prostokątnym, czyli z twierdzenia Pitagorasa

$$|DC|^2 = (2r)^2 - |AC|^2 = (2r)^2 - |AB|^2.$$

Wówczas, w związku z tym, że wszystkie odcinki mają długości nieujemne otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|OD|}{|DC|} \Leftrightarrow \frac{|AB|^2}{|BC|^2} = \frac{|OD|^2}{|DC|^2} \Leftrightarrow \frac{|AB|^2}{|BC|^2} = \frac{r^2}{4r^2 - |AB|^2} \Leftrightarrow 4r^2|AB|^2 - |AB|^4 =$$

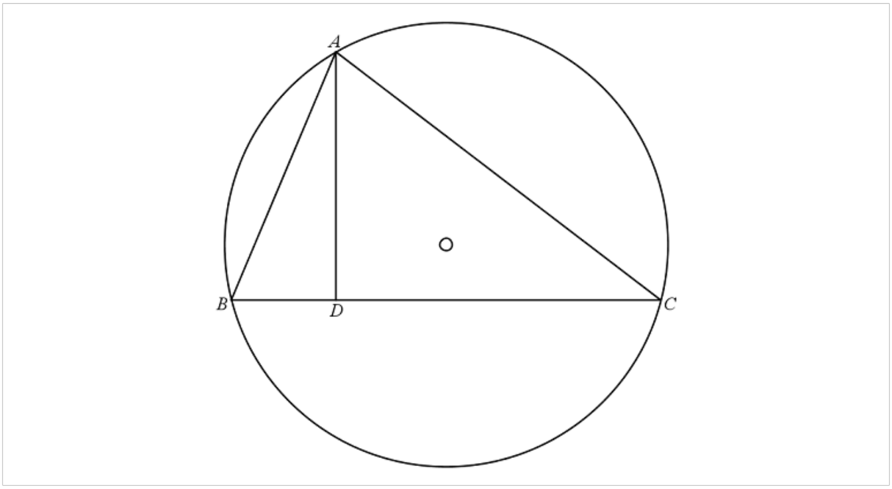
$$= r^2|BC|^2 \Leftrightarrow r^2(4|AB|^2 - |BC|^2) = |AB|^4 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{|AB|^4}{4|AB|^2 - |BC|^2}}.$$

Znamy długości wszystkich boków trójkąta ABC, zatem możemy wyliczyć również wartość r.

Ponadto znamy długość odcinka $\frac{1}{2}|BC|$. Jeżeli wartość tę pomnożymy przez 10^5 i podzielimy przez r oraz wynik tych rachunków znajdziemy w środkowej kolumnie tablic Kopernika, to po lewej stronie znajdziemy $\frac{1}{2}|\sphericalangle DAC|$, czyli będziemy mieli też $|\sphericalangle DAC|$. Tym samym, będziemy znali również $|\sphericalangle BAC|$. Stąd z łatwością można obliczyć pozostałe kąty:

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle BAC|).$$

– Załóżmy, że trójkąt ABC nie jest trójkątem równoramiennym oraz BC jest najdłuższym bokiem tego trójkąta. Wówczas $\sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle ABC$ są kątami ostrymi. Poprowadźmy z wierzchołka A wysokość AD trójkąta ABC.



Rys. 15.

$\sphericalangle ACB$ jest ostry, więc kwadrat długości boku AB jest mniejszy niż suma kwadratów długości boków AC oraz BC. Zatem

$$|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 > 0.$$

Ponadto

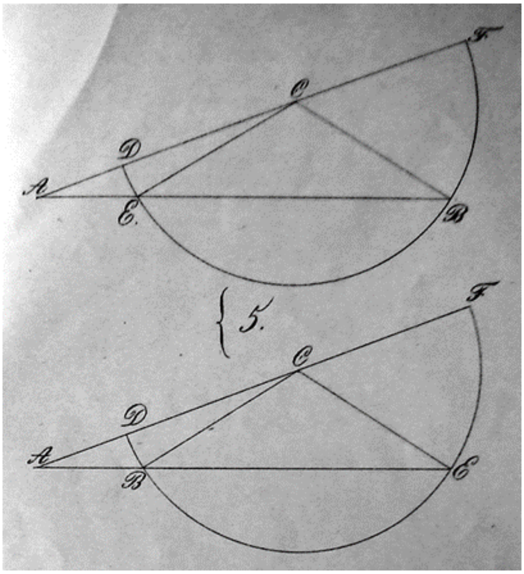
$$|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 = 2|BC||CD|.$$

(Istotnie:
$|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - 2|BC||CD| = 0 \Leftrightarrow |AC|^2 + |BD|^2 + 2|BD||DC| + |DC|^2 - |AB|^2 - 2|BC||CD| = |AC|^2 + |BD|^2 + 2|BD||CD| + |DC|^2 - |AB|^2 - 2|BD||CD| - 2|DC|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 - |DC|^2 - |AB|^2 = |AD|^2 - |AD|^2 = 0$ co należało pokazać)

Z powyższej równości możemy wyliczyć $|CD|$, ponieważ wszystkie pozostałe wielkości mamy dane w zadaniu. Tym samym możemy znaleźć również $|BD|$. W każdym z trójkątów prostokątnych $\triangle ABD$ oraz $\triangle ADC$ znamy dwa boki, zatem jesteśmy w stanie obliczyć miary kątów $\sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle ABC$. Finalnie:

$$|\sphericalangle BAC| = 180° - |\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle ABC|.$$

Drugi sposób
Rozważmy trójkąt *ABC* taki, że $|CB| < |CA|$ oraz zakreślmy okrąg o środku w punkcie *C* oraz promieniu równym $|CB|$. Punkt przecięcia tego okręgu z bokiem *AC* oznaczmy *D*, a punkt przecięcia z przedłużeniem tego boku oznaczmy *F*. Punkt przecięcia okręgu z bokiem *AB*, lub z jego przedłużeniem, oznaczmy *E*.



Rys. 16.[39]

Kwadrat stycznej poprowadzonej z *A* do okręgu z jednej strony jest równy $|AD| \times |AF|$, a z drugiej strony równy $|AB| \times |AE|$. Zatem $|AD| \times |AF| = |AB| \times |AE|$. Zauważmy, że znamy $|AF|$, $|AD|$ (gdzie $|CB|$ i $|CA|$ są dane) oraz $|AB|$, wówczas na podstawie tej zależności, możemy wyliczyć $|AE|$. Stąd $|BE| = |AB| - |AE|$. Podsumowując, znamy długości wszystkich boków trójkąta *BCE*. Dzięki temu, wykonując rozumowania analogiczne do tych przeprowadzonych powyżej, w pierwszym sposobie rozwiązania tego zadania, możemy znaleźć $|\sphericalangle CBA|$ oraz pozostałe kąty trójkąta *ABC*.

Warto też podkreślić, że nie ma znaczenia, czy powyższe rozumowanie przeprowadzimy dla boku , czy też dla jego przedłużenia (do przecięcia z okręgiem).

[39] E. Fassbender, op. cit., tablica z rysunkami.

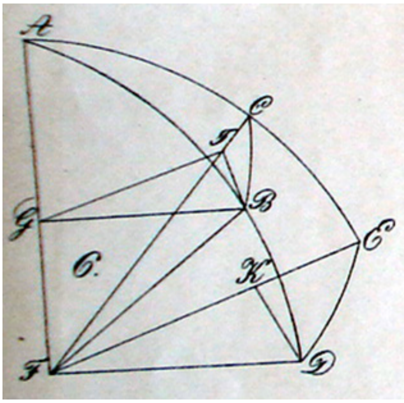
ROZDZIAŁ XIV: *O TRÓJKĄTACH SFERYCZNYCH*

Umiejętność rozwiązywania trójkątów płaskich była Kopernikowi potrzebna do rozwiązywania trójkątów sferycznych. Niezbędny był też sferyczny odpowiednik twierdzenia sinusów, który astronom sformułował i udowodnił na samym początku rozdziału XIV.

Twierdzenie sinusów dla trójkątów sferycznych

Twierdzenie. Kiedy jeden z kątów trójkąta sferycznego jest prosty, to cięciwa stowarzyszona z podwojonym bokiem tego trójkąta leżącym naprzeciw kąta prostego, do cięciwy stowarzyszonej z innym podwojonym bokiem tego trójkąta, ma się tak, jak średnica kuli do cięciwy stowarzyszonej z podwojonym kątem leżącym naprzeciw wcześniej wybranego boku.

Dowód: Niech w trójkącie sferycznym *ACB*, kąt przy wierzchołku *C* będzie kątem prostym.



Rys. 17.[40]

Przedłużmy boki *AC* i *AB* trójkąta *ACB* do ćwiartek obwodów kół wielkich kuli (łuki *ACE* oraz *ABD*), której środkiem jest punkt *F*. Kąt przy wierzchołku *A* trójkąta sferycznego *ABC* oznaczmy $\sphericalangle A$. Rozważamy kliny *ABCF* i *AEDF*. Prowadzimy odcinki: $BG \perp AF$, $BI \perp FC$ oraz *DK* taki, że $DK \perp EF$ i $DK \perp GI$. Płaszczyzny *DEF* i *BCF* są prostopadłe do płaszczyzny *AEF*, a zatem $DK \parallel BI$ i $|\sphericalangle FDK| = |\sphericalangle GBI|$, skąd wynika, że $\triangle FKD \sim \triangle GIB$. Zatem $|DF|:|BG| = |DK|:|BI|$, a że $|BI| = \sin|BC|$, $|BG| = \sin|AB|$, $|DK| = \sin|\sphericalangle A|$ i $|DF| = r$, więc $r : \sin|AB| = \sin|\sphericalangle A| : \sin|BC|$ co należało udowodnić.

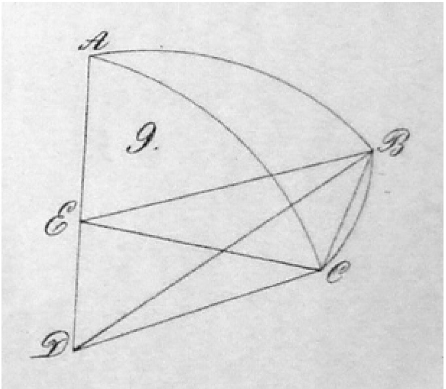
Wykorzystując twierdzenie sinusów Kopernik przeprowadził szereg rozumowań pozwalających: 1) rozwiązać prostokątny trójkąt sferyczny, gdy znany jest jego

[40] Ibidem., tablica z rysunkami.

bok i kąt, 2) rozwiązać prostokątny trójkąt sferyczny, gdy znane są wszystkie jego kąty, 3) rozwiązać dowolny trójkąt sferyczny, gdy znane są jego dwa boki i kąt, 4) rozwiązać dowolny trójkąt sferyczny, gdy znany jest bok i dwa kąty, po czym przeszedł do udzielenia odpowiedzi na pytanie: Czy znajomość długości trzech boków trójkąta sferycznego jest wystarczająca do tego, aby znaleźć miary jego kątów?

Rozwiązywanie dowolnego trójkąta sferycznego, gdy dane są wszystkie jego boki
Istotnie:

1) Niech trójkąt sferyczny *ABC* będzie trójkątem równoramiennym, gdzie $|AB|_ł = |AC|_ł$.



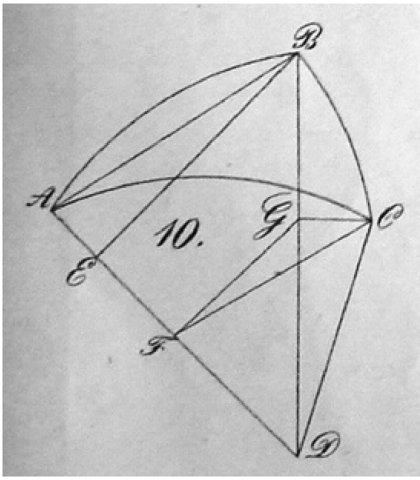
Rys. 18.[41]

W tej sytuacji, oznaczamy najpierw środek kuli jako *D* i prowadzimy odcinek *AD*. Następnie, kreślimy odcinek *BE* będący połową cięciwy stowarzyszonej z podwojonym łukiem *AB* ($|BE| = \sin|AB|$) oraz *CE* będący połową cięciwy stowarzyszonej z podwojonym łukiem *AC* ($|CE| = \sin|AC|$). Punkt *E* będzie leżał na odcinku *AD* oraz będzie wspólnym końcem obu połów cięciw, ponieważ $|AB|_ł = |AC|_ł$. Oczywiście: $BE \perp AD$ oraz $CE \perp AD$. Zatem, w trójkącie płaskim *BEC* możemy obliczyć długości wszystkich jego boków, a stąd, wykorzystując rozumowanie przeprowadzone w (***), możemy również wyznaczyć $|\sphericalangle BEC|$, $\sphericalangle BEC$ jest kątem przecięcia płaszczyzn *DAB* oraz *DAC*, czyli $\sphericalangle BAC$ trójkąta sferycznego *ABC*.

Pozostałe kąty tego trójkąta można obliczyć wykorzystując poniższe rozumowanie:

[41] Ibidem, tablica z rysunkami.

2) Niech wszystkie boki trójkąta *ABC* będą różne. Przyjmijmy, że $|AC|_ł = |AB|_ł$.



Rys. 19.[42]

Wówczas:

a) Prowadzimy odcinek *CF* będący połową cięciwy stowarzyszonej z podwojonym łukiem *AC*. Jest on prostopadły do odcinka *AD*, gdzie *D* jest środkiem kuli.

b) Rozważmy trójkąt prostokątny *CFD*. Znamy długość boku *CF* tego trójkąta, wiemy też, że $|CD|$ jest równa długości promienia kuli, zatem korzystając z twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć $|FD|$.

c) W następnym kroku poprowadźmy odcinek *BE* będący połową cięciwy stowarzyszonej z podwojonym łukiem *AB*. Ten odcinek również jest prostopadły do *AB* i poddając pod rozwagę trójkąt *BED*, w którym znamy $|BE|$ oraz $|BD|$ (jest to promień kuli), możemy na podstawie twierdzenia Pitagorasa wyliczyć $|ED|$.

d) Z tego, że $|AC|_ł > |AB|_ł$ wynika, że $|CF| > |BE|$ oraz $|DF| < |DE|$, czyli punkt *F* leży pomiędzy *D* oraz *E*.

e) Poprowadźmy teraz odcinek równoległy do *BE* przechodzący przez punkt *F* i przecinający *BD* w punkcie *G* (odcinek *FG*) i połączmy punkty *G* z *C*. Wówczas: $|\sphericalangle GFD| = 90°$.

f) Kąt nachylenia płaszczyzn *DAB* oraz *CAD*, to $\sphericalangle CFG$. Należy wyliczyć miarę tego kąta.

   – Korzystając z twierdzenia Talesa, otrzymujemy, że:

[42] Ibidem, tablica z rysunkami.

$$\begin{cases} \dfrac{|DG|}{|DB|} = \dfrac{|DF|}{|DE|} \\ \dfrac{|FG|}{|BE|} = \dfrac{|DF|}{|DE|} \end{cases}$$

Jest to układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, którymi są $|DG|$ oraz $|FG|$, i możemy je wyliczyć rozwiązując powyższy układ.

– W związku z tym, że znana jest długość łuku BC, zatem na mocy wcześniejszych rozważań możemy też obliczyć miatę kąta środkowego z nim stowarzyszonego, tym samym możemy wyliczyć miarę $\sphericalangle BDC$, czyli również $|\sphericalangle GDC|$. W trójkącie GDC znamy zatem $|DG|$, $|DC|$ oraz $|\sphericalangle GDC|$, czyli możemy obliczyć też $|CG|$.
– Rozważając teraz trójkąt CFG, znamy w nim $|CF|$, $|GF|$ oraz $|CG|$, czyli na mocy rozumowania z (**), możemy obliczyć miarę kąta $\sphericalangle CFG$. Co oznacza, że w ten sposób możemy wyliczyć kąt między płaszczyznami BAD oraz CAD, czyli, *de facto*, kąt BAC trójkąta sferycznego ABC.

g) Przeprowadzając analogiczne rozumowania można wyliczyć miary pozostałych kątów trójkąta ABC.

Rozważania w rozdziale XIV Kopernik zakończył rozwiązaniem trójkąta, gdy znane są wszystkie jego kąty.

Z JAKICH DZIEŁ KORZYSTAŁ KOPERNIK PRZYGOTOWUJĄC ROZDZIAŁY XII, XIII I XIV PIERWSZEJ KSIĘGI *DE REVOLUTIONIBUS*?

Odpowiedź na pytanie czy Mikołaj Kopernik był autorem twierdzeń zawartych w rozdziałach XII, XIII oraz XIV pierwszej księgi *De revolutionibus* była przedmiotem badań wielu historyków matematyki. Bez wątpienia był on autorem dowodu twierdzenia sinusów dla trójkątów sferycznych.

Do początków XX wieku naukowcy, z nielicznymi wyjątkami, byli przekonani, że Kopernik był autorem wszystkich tych twierdzeń[43]. Powoływali się wówczas na argument natury moralnej: gdyby Kopernik przepisał twierdzenia do kogoś innego, to zaznaczyłby to w swoim dziele. I faktycznie, w rozdziale XII Kopernik kilkukrotnie powoływał się na Ptolemeusza, wykorzystując np. to, że *Iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta*. Czy twierdzenia/rozwiązania zadań, przy których Kopernik

[43] *Mikołaj Kopernik, cz. I. Studya nad pracami Kopernika oraz materiały biograficzne*, red. L.A. Birkenmajer, Kraków 1900.

nie umieścił odwołania do innego matematyka były już jego autorstwa? Ludwik Birkenmajer w *Mikołaj Kopernik, cz. I. Studya nad pracami Kopernika oraz materiały biograficzne* bardzo dokładnie przyjrzał się treściom zawartym w trzech rozdziałach trygonometrycznych *De revolutionibus*. Wysunął wówczas przypuszczenie, że rozdziały XII oraz XIII zostały oparte na treściach zawartych albo w

1. Regiomontanus, *Epitoma in Almagestum Ptolemaei*, Venice 1496 (był to „swobodny wyciąg" z „Almagestu" Ptolemeusza) albo
2. Regiomontanus, *De triangulis omnimodis libri quinque*, Nuremberg 1533 (dzieło to powstało ok. 1464 roku, wydanie z 1533 roku było pierwszym wydaniem drukowanym) albo
3. Claudius Ptolemaeus, *Almagestu[m] Cl. Ptolemei Pheludiensis Alexandrini Astronomo[rum]* Principis, Venetiae 1515 (dzieło to powstało ok. 150 r. n.e.)[44].

Zgodnie z badaniami przeprowadzonymi przez Cecylię Iwaniszewską, Kopernik pracował nad *De revolutionibus* najprawdopodobniej w latach od ok. 1515 do 1533, później prowadził jedynie obserwacje astronomiczne[45]. Zanim *De revolutionibus* powstało w swojej ostatecznej formie, Kopernik jeszcze przed 1515 rokiem (a nawet mogło to być przed 1512 rokiem) stworzył szczegółowo opracowany heliocentryczny mechanizm świata oparty na innych zasadach. Do omówienia tego systemu potrzebował cały aparat trygonometryczny. W związku z tym, aby Kopernik mógł bazować na *De triangulis omnimodis libri quinque* Regiomontanusa musiałby znać rękopis tego dzieła, a Birkenmajer udowodnił, że było to niemożliwe. Kopernik zapoznał się z tym dziełem dopiero w 1539 roku, kiedy przywiózł mu je Joachim Retyk, a całe dzieło *De revolutionibus* było już wtedy gotowe od niemal siedmiu lat. Tym samym, Kopernik w rozdziałach XII i XIII bazował na Ptolemeuszu. Nie ma znaczenia czy na *Epitomacie* czy *Almageście*, bo *Epitomat* był wyciągiem z *Almagestu*.

Rozdział XIV, poświęcony trygonometrii sferycznej, Kopernik oparł na trygonometrii Gebera[46], którą podobno dobrze poznał już około 1512 roku. Geber wprowadził wzór w prostokątnym trójkącie sferycznym: $\cos B = \sin A \cos b$, z którego korzystał też Kopernik. Jako jedno z uzasadnień, że Kopernik znał pracę Gebera, Birkenmajer podał to, iż w rachunkach trygonometrycznych Kopernik używał wstaw (sinusów), a nie całych cięciw jak Ptolemeusz. Śladem Gebera zamiast „sinus" pisał „połowa cięciwy podwojonego łuku".

Tablicom sinusów („połówek cięciw podwojonego łuku") przy $r = 10^5$ i argumentach rosnących co 10' umieszczonych w *De revolutionibus* dokładnie przyjrzała

[44] Cecylia Iwaniszewska w *Astronomii Mikołaja Kopernika* (Toruń, 1994) zaznaczyła, że Kopernik napisał swoje dzieło opierając się na *Almageście* Ptolemeusza.

[45] C. Iwaniszewska, *Astronomia Mikołaja Kopernika*, Toruń 1994.

[46] Geber [Dżabir Ibn Aflach], *De astronomia libri IX*, Norimbergae, 1534.

się Grażyna Rosińska w artykule *Przełom w trygonometrii połowy XV wieku – Kopernik jako spadkobierca i jako kontynuator tego przełomu*[47]. Rosińska najpierw zauważyła, że tablice sinusów umieszczone przez Kopernika w *De revolutionibus* i tablice sinusów znajdujące się w *De lateribus et angulis triangulorum…*[48] były różne – tablice dołączone do traktatu z 1542 roku zostały przygotowane w odstępach co 1' z dokładnością do 7 cyfr, podczas gdy tablice w *De revolutionibus* podane były w odstępach co 10' z dokładnością do 5 cyfr. Pojawiały się nawet głosy, iż tablice dołączone do *De lateribus et angulis triangulorum…* zostały przygotowane przez Retyka. Grażyna Rosińska zadała temu kłam. Zauważyła, iż tablice Retyka były dokładną kopią tablic sinusów, które przygotował Regiomontanus i wydał drukiem w 1541 roku, a do *De lateribus et angulis triangulorum…* najprawdopodobniej zostały one dołączone do przez redaktorów. Tablice te nie mogły mieć wpływu na postać tablic Kopernika. Ale wpływ ten mogły mieć inne tablice tego samego autora. W 1467 roku Regiomontanus stworzył tablice sinusów dla promienia $r = 60 \times 10^5$ przy argumentach rosnących co 1'. Tymi tablicami według Grażyny Rosińskiej powszechnie posługiwano się w Krakowie w XV wieku, a w XVI wieku wydano je drukiem. Tym samym, Kopernik musiał je poznać w trakcie studiów w Krakowie (w latach 1491–1494). Rosińska podzieliła wartości z tablicy Regiomontanusa przez 6 i otrzymała wartości z tablic Kopernika (pomijając błędy rachunkowe Kopernika). Tym samym, pokazała, że Kopernik przygotowując tablice sinusów o promieniu „dziesiętnym" bazował na tablicy o promieniu „sześćdziesiętno-dziesiętnym".

KONKLUZJE

Aparat matematyczny zawarty w rozdziałach XII, XIII i XIV pierwszej księgi *De revolutionibus* w dużej mierze znany był już wcześniej. Jedynie dowód twierdzenia sinusów dla trójkątów sferycznych był oryginalnym dziełem Kopernika. Niemniej jednak, wybór materiału, usystematyzowanie go, a w pewnych aspektach również dopracowanie czy wyjaśnienie w bardziej przystępny sposób, było tym, co zostało docenione przez naukowców współczesnych Kopernikowi i jest doceniane również ocenie. Niektórzy historycy trygonometrię Kopernika przedkładali nad trygonometrię Regiomontanusa (czyniła tak np. Jadwiga Dianni). Wielkością Kopernika, wielkością *De revolutionibus*, było umiejętne wykorzystanie twierdzeń matematycznych, które były znane naukowcom w tamtym czasie i w oparciu o ten aparat opracowanie teorii heliocentrycznej.

Aparat matematyczny *De revolutionibus* został doceniony również przez nauczycieli szkół średnich funkcjonujących na ziemiach polskich od XVI do początku

[47] G. Rosińska, *Przełom w trygonometrii połowy XV wieku – Kopernik jako spadkobierca i jako kontynuator tego przełomu*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 2002, 47.

[48] M. Kopernik, *De lateribus et angulis triangulorum…*.

XX wieku. Należy tutaj podkreślić, że najlepsze szkoły średnie w tym czasie (również szkoły przygotowujące do egzaminów maturalnych) były placówkami o charakterze półwyższym, często nazywane były „akademiami", a w Prusach „szkołami uczonymi". Pracujący w nich nauczyciele często prowadzili swoją działalność naukową, mieli stopnie naukowe, a absolwenci tych szkół zasiadali na najwyższych stanowiskach państwowych. Dostęp do studiów uniwersyteckich był w tym czasie utrudniony, dlatego elitę intelektualną kraju kształciły przede wszystkim szkoły średnie. Po I wojnie światowej rozwiązywanie trójkątów sferycznych usunięto z programów nauczania, ale rozwiązywanie trójkątów płaskich w nich pozostało i jest wykładane po dzień dzisiejszy.

Mikołaj Kopernik uważany jest za jednego z ojców trygonometrii. Dzieje się tak przede wszystkim ze względu na jego osiągnięcia związane z funkcją trygonometryczną nazwaną secansem. Odręczny zapis funkcji secans dokonany przez Kopernika ok. 1500 roku jest najstarszym świadectwem posługiwania się tą funkcją trygonometryczną w matematyce. Co więcej Kopernik jest autorem pierwszych w historii tablic secansów. Przygotował je prawdopodobnie ok. 1520 roku, dla kątów od 0° do 90°, i umieścił je ręcznie pośród kolumn drukowanej tabeli tangensów przygotowanej przez Regiomontanusa i nazwanej *Tabula secunda*. W 1551 roku Joachim Retyk tablice secansów zamieścił w swoim traktacie *Canon doctrinae triangulorum*, zaznaczając, że pochodzą one od Kopernika.

BIBLIOGRAFIA

Źródła drukowane

Crügero Pietro, *Synopsis trigonometriae sive doctrinae triangulorum, cum canone trigonometrico*, Dantisci 1612.

– *Doctrina Astronomiae Sphaerica: Praeceptis methodicis & perspicuis, per Globum, Tabulas, Trigonometriam, tam Veterem quam Logarithmicam, explicata ac demonstrata, Cum Tabulis Ad Eam Pertinentibus*, Dantisci 1635.

Fassbender Eduard, *Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreieckberechnungen*, Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn, Thorn 1872.

Freytag Adam, *Architectura Militaris Nova Et Aucta, Oder Newe Vermehrte Fortification, Von Regular Vestungen, Von Irregular Vestungen und Aussen Wercken*, Leyden 1631.

Geber [Dżabir Ibn Aflach], *De astronomia libri IX*, Norimbergae 1534.

Kopernik Mikołaj, *De lateribus et angulis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum, libellus eruditissimus et utilissimus cum ad plerasque Ptolomaei demonstrationes intelligendas, tum vero ad alia multa, scriptus a clarissimo et doctissimo viro D. Nicolao Copernico Toronensi*, Vittembergae 1542.

Kopernik Mikołaj, *De revolutionibus libri sex*, 1520–1541, Źródło: Biblioteka Jagiellońska, sygn. BJ Rkp. 10000 III.

Kopernik Mikołaj, *Nicolai Copernici Torinensis De revolutionibus orbium coelestium, Libri VI*, Norimbergae 1543.

Lipiński Józef, *Plan nauk szkół departamentowych*, Warszawa 1812.

Mikołaj Kopernik, cz. I. Studya nad pracami Kopernika oraz materiały biograficzne, red. Ludwik Antoni Birkenmajer, Kraków 1900.

Ptolemaeus Claudius, *Almagestu[m] Cl. Ptolemei Pheludiensis Alexandrini Astronomo[rum] Principis*, Venetiae 1515.

Regiomontanus Müller Johann, *De triangulis omnimodis libri quinque*, Nuremberg 1533.

Regiomontanus Müller Johann, *Epitoma in Almagestum Ptolemaei*, Venice 1496.

Retyk Joachim, *Canon doctrinae triangulorum*, Lipsiae 1551.

Solski Stanisław, *Geometra Polski, tj. nauka rysowania, podziału i rozmierzania linii, angułów, figur i brył*, t. 1–3. Kraków 1683–1686.

Statistik des Gymnasiums zu Elberfeld, Festschrift zur 24 Februar 1824 erfolgten öffentlichen Anerkennung des Gymnasiums, Elberfeld 1874.

Toński Jan, *Arithmetica vulgaris et trigonometria rectilineorum pro ut universae geometria Practica, alijusqve Matheseos partibus, Geographia, Architectonica, Gnomonica etc.*, Ingolstadt 1640.

Ustawy Komisyj Edukacyj Narodowej dla stanu akademickiego i na szkoły w krajach Rzeczypospolitej przepisane w Warszawie roku 1783.

Walz Hermann, *Katalog Lehrerbibliothek des Gymnasiums zu Barmen*, Barmen 1897.

Wolff Christian, *Der Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften. Dritter Theil welcher die Optik, Catoptrik und Dioptrik, die perspective, die Sphärische Trigonometrie, Astronomie, Chronologie, Geographie und Gnomonik in sich enthält*, wyd. 3, Halle 1725.

– *Der Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften. Erster Theil, welche einen Unterricht von der Mathematischen Lehr-Art, die Rechen-Kunst, geometrie, Trigonometrie und Bau-Kunst in sich enthält, zu mehrerem Aufnehmen der Mathematik so wohl auf hohen als niedrigen Schulen*, wyd. nowe, ulepszone i rozszerzone, Frankfurt und Leipzig 1750.

Opracowania

Cynarski Stanisław, *Znajomość nauki Kopernika w Polsce XVII i XVIII wieku*, Kraków 1973.

Czerniakowska Małgorzata, *Matematyk i astronom Piotr Krüger 1580–1639*, Gdańsk 2015.

Duda Roman, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Warszawa 2019.

Iwaniszewska Cecylia, *Astronomia Mikołaja Kopernika*, Toruń 1994.

Karpińska Karolina, *Geometria Mikołaja Kopernika: o cięciwach w kole*, „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli" 2018, listopad/grudzień, 6(27).

– *Mathematics teaching in gymnasia and real schools in Poland in the years 1795–1918: Schools with Polish and German as the language of instruction – comparison*, [w:] *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education (ESU-8)*, red. Évelyne Barbin i in., Oslo 2019.

– *Gnomonics in Secondary School Education in the Territories of Poland in the 17th–20th Centuries*, w: *Advances In The History Of Mathematics Education*, red. Alexander Karp, Springer 2022.

Karpińska Karolina, Domoradzki Stanisław, *O egzaminie maturalnym z matematyki na obszarze zaboru pruskiego od XVIII do początku XX wieku*, „Antiquitates Mathematicae" 2017, 11.

Kössler Franz, *Personenlexikon von Lehrern des 19. Jahrhunderts Berufsbiographien aus Schul-Jahresberichten und Schulprogrammen 1825–1918 mit Veröffentlichungsverzeichnissen*, t.: Faber – Funge, Universitätsbibliothek Gießen, Giessener Elektronische Bibliothek 2008.

Komarzyniec Grażyna, *Nauczanie matematyki w krakowskiej Szkole Nowodworskiej w latach 1588–1914*, Kraków 2004.

Krakowski krąg Mikołaja Kopernika, red. Mieczysław Markowski, Kraków 1973.

Księga Pamiątkowa 400-lecia Toruńskiego Gimnazjum Akademickiego, red. Zbigniew Zdrójkowski, t. 1 [XVI–XVIII w.], Toruń 1972.

Kubik Kazimierz, *Nauczanie matematyki w Toruńskim Gimnazjum Akademickim w XVI–XVIII w.*, w: *Księga Pamiątkowa 400-lecia Toruńskiego Gimnazjum Akademickiego*, red. Zbigniew Zdrójkowski, t. 1, Toruń 1972.

Kurczab Marcin, Kurczab Elżbieta, Świda Elżbieta, *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa 2. Zakres podstawowy*, Warszawa 2020.

Mikołaj Kopernik: O obrotach, w: *Mikołaj Kopernik: Dzieła wszystkie II*, red. Jerzy Dobrzycki, Warszawa–Kraków 1976.

Ogonowski Zbigniew, *Arianie polscy*, Warszawa 1952.

„Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła ponadpodstawowa: 4-letnie liceum, 5-letnie technikum", „Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła ponadpodstawowa: branżowa szkoła I stopnia", „Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła ponadpodstawowa: branżowa szkoła II stopnia", Ministerstwo Edukacji Narodowej 2023.

Przypkowski Tadeusz, *Astronomia w Kaliszu*, w: *Osiemnaście wieków Kalisza*, red. Aleksander Gieysztor, Poznań 1960.

Rosińska Grażyna, *Przełom w trygonometrii połowy XV wieku – Kopernik jako spadkobierca i jako kontynuator tego przełomu*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 2002, r. 47.